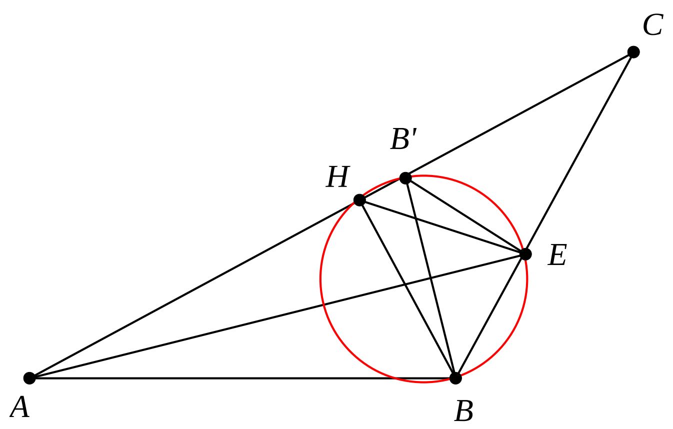
Gara di matematica a squadre

Teramo, 24 febbraio 2017

1. Da tre punti A, B e C, vertici di un triangolo acutangolo in A, i Bassotti stanno cercando di dare l'assalto al deposito H, piede dell'altezza del triangolo condotta da B. Zio Paperone calcola velocemente che, per salvarsi dall'attacco, deve colpire Nonno Bassotto che coordina l'attacco da un punto E, piede della bisettrice condotta da A. Per fare ciò Zio Paperone deve calcolare esattamente l'angolo di tiro $\widehat{EHC}$, sapendo solamente che $\widehat{AEB} = 45°$. Che angolo (misurato in gradi) salverà il deposito di Zio Paperone ?

   [R=45]

   Soluzione:

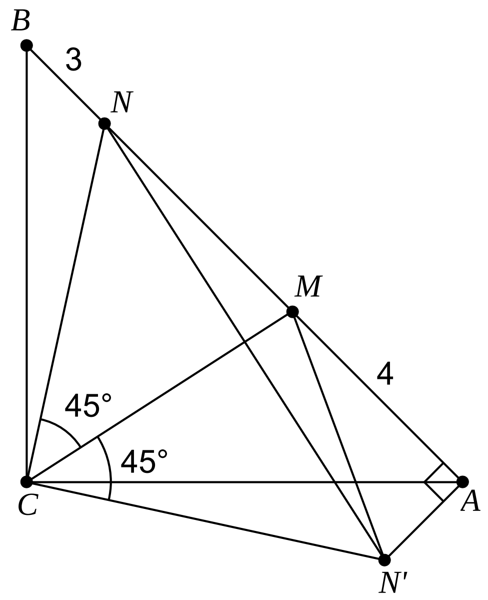
   

   - Eseguiamo la riflessione R_{AE} intorno alla retta AE;
   - essendo AE bisettrice dell'angolo $\widehat{CAB}$ abbiamo che $B \to B' \in AC$;
   - dato che $\widehat{AEB} = \widehat{AEB'} = 45°$ risulta che $\widehat{BEB'} = 90° = \widehat{BHB'}$;
   - $\therefore$ il quadrilatero $EB'HB$ è ciclico e quindi $\widehat{EHC} = \widehat{B'HE} = \widehat{B'BE} = 45°$

2. Sia ABC un triangolo isoscele rettangolo con $C = 90°$. Se M ed N sono i punti appartenenti all'ipotenusa AB, con M più vicino ad A ed N più vicino a B, per cui $\widehat{MCN} = 45°$, $AM = 4$ e $BN = 3$, calcolare la misura di MN.

   [R=5]

   Soluzione:

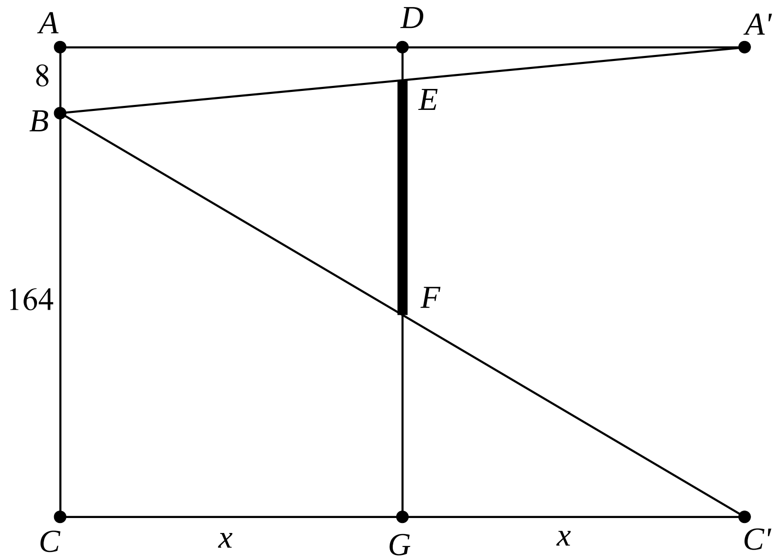


- La rotazione $R(C, -90°)$ manda $B \to A$, $N \to N'$ da cui $AN' = BN = 3$;
- essendo $45° = \widehat{CBA} = \widehat{CAN'}$ deduciamo che $\widehat{MAN'} = 90°$ e quindi $MN' = 5$;
- osserviamo che $\triangle CNN'$ è rettangolo isoscele ed essendo $\widehat{NCM} = 45°$ per ipotesi deduciamo che CM è l'asse del segmento NN';
- $\therefore\ MN = MN' = 5$

3. Una ragazza di altezza 172 cm vuole collocare uno specchio sulla parete della sua stanza in modo da potersi specchiare dalla punta dei piedi fino alla testa. Calcolare l'altezza minima dello specchio sapendo che gli occhi della ragazza si trovano 8 cm più in basso della sommità della sua testa.

[R=86]

Soluzione:



- Indichiamo rispettivamente con A', C' i simmetrici di A e di C rispetto alla parete dello specchio;

- se la ragazza si trova a una distanza x dalla parete i suoi piedi saranno visibili se l'estremo inferiore F dello specchio appartiene a $C'B$;
- analogamente la testa sarà visibile se l'estremo superiore E dello specchio appartiene a BA';
- posto $CG = GC' = x$, essendo $\triangle BCC' \sim \triangle FGC'$ abbiamo

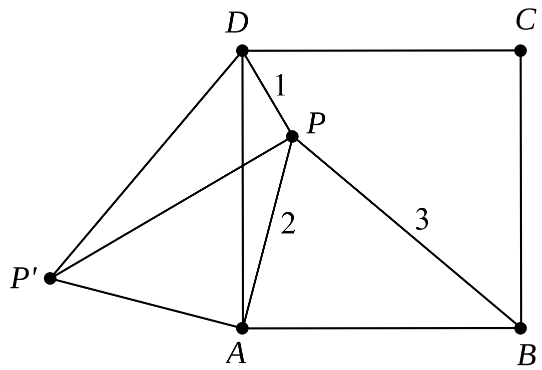
$$FG : 164 = x : 2x \quad \Rightarrow \quad FG = 82$$

- analogamente si trova che $DE = 4$;
- $\therefore$ l'altezza minima dello specchio è $172 - 82 - 4 = 86$ cm.

4. Sia P un punto interno ad un quadrato $ABCD$. Se $DP = 1$, $AP = 2$, $BP = 3$ calcolare la misura in gradi dell'angolo $\widehat{APD}$.

[R=135]

Soluzione:



- Considerata la rotazione $R(A, 90°)$ aabbiamo $B \to B' = D$, $P \to P'$ con $\angle P'AP = 90°$, $P'A = 2$ e $P'D = 3$;
- notiamo che il triangolo $\triangle P'AP$ è metà quadrato per cui $\angle P'PA = 45°$ e $P'P = 2\sqrt{2}$;
- nel triangolo $\triangle P'PD$ abbiamo:

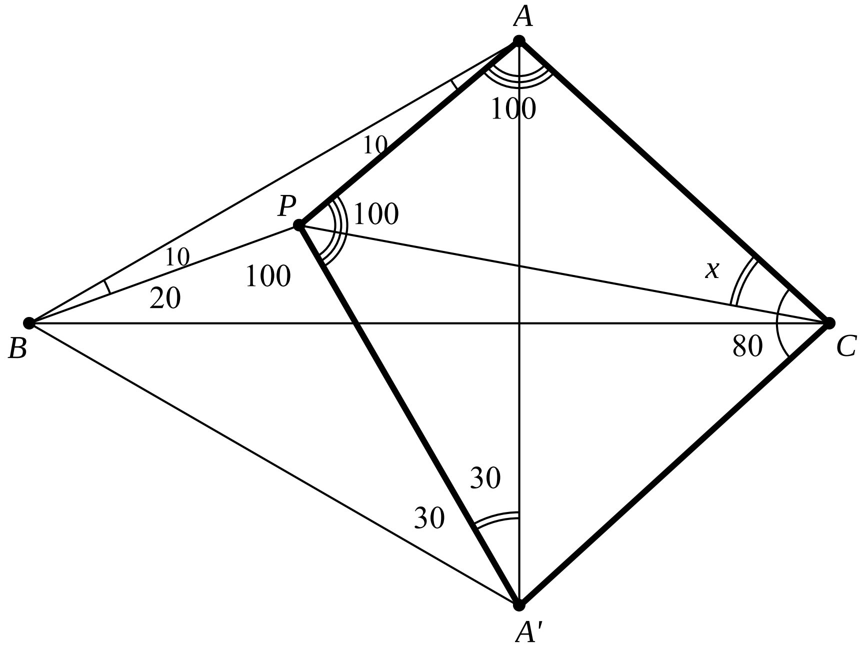
$$(P'P)^2 + PD^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 3^2 = (P'D)^2$$

da cui segue che $\triangle P'PD$ è un triangolo rettangolo con $\angle P'PD = 90°$;
- $\therefore$ $\angle APD = 45° + 90° = 135°$

5. Sia dato un triangolo ABC e sia P un suo punto interno tale che $\widehat{PAB} = \widehat{PBA} = 10°$, $\widehat{PBC} = 20°$ e $\widehat{PAC} = 100°$. Calcolare la misura in gradi dell'angolo $\widehat{PCA}$.

[R=30]

Soluzione:



- Riflettiamo il triangolo $\triangle ABC$ intorno alla retta BC;
- $\triangle BAA'$ è equilatero;
- dato che $A'P$ è asse di simmetria del segmento AB abbiamo $\angle PA'B = \angle PA'A = 30°$;
- osserviamo che $\angle APA' = 100°$ e $\angle ACA' = 40° + 40° = 80°$;
- poichè $\angle APA' + \angle ACA' = 180°$ il quadrilatero $APA'C$ è ciclico;
- $\therefore\ \angle PCA = \angle PA'A = 30°$.

6. Trovare un numero naturale n tale che

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{115}{116}$$

[R=115]

Soluzione:

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{115}{116} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{115}{116} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{n}{n+1} = \frac{115}{116} \quad \Leftrightarrow$$
$$116n = 115(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad n = 115$$

7. Sia (a_n) una successione tale che

$$a_n + a_m = a_{n+m}$$

per ogni coppia di interi positivi n, m. Sapendo che $a_1 = \frac{1}{2013}$ calcolare la somma dei suoi primi 2013 termini.

[R=1007]

Soluzione: Osserviamo che

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + a_1 = 2a_1 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 3a_1 \\ &\cdots \\ a_{2013} &= 2013a_1 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013} = \\ =&a_1 + 2a_1 + 3a_1 + \cdots + 2013a_1 = \\ =&(1 + 2 + \cdots + 2013)\, a_1 = \\ =&\frac{2013 \cdot 2014}{2} \cdot \frac{1}{2013} = 1007 \end{aligned}$$

8. La somma
$$S = \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{5^2+1}{5^2-1} + \frac{7^2+1}{7^2-1} + \cdots + \frac{99^2+1}{99^2-1}$$
può essere scritta nella forma $S = p/q$ con p,q interi coprimi. Determinare $p+q$.

[R=5049]

Soluzione: Osserviamo che
$$\frac{k^2+1}{k^2-1} = 1 + \frac{2}{k^2-1} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$$
pertanto
$$\begin{aligned} &\frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{5^2+1}{5^2-1} + \frac{7^2+1}{7^2-1} + \cdots + \frac{99^2+1}{99^2-1} = \\ =&\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right) = \\ =&\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{\text{49 addendi}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = 49 + \frac{49}{100} = \frac{4949}{100} \end{aligned}$$
Pertanto $p + q = 5049$.

9. Calcolare il prodotto
$$P = \frac{(4 \times 7 + 2)\,(6 \times 9 + 2)\,(8 \times 11 + 2) \cdots (100 \times 103 + 2)}{(5 \times 8 + 2)\,(7 \times 10 + 2)\,(9 \times 12 + 2) \cdots (99 \times 102 + 2)}$$

[R=510]

Soluzione: Osserviamo che
$$\frac{n(n+3)+2}{(n+1)(n+4)+2} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+5n+6} = \frac{n+1}{n+3}$$
abbiamo
$$\begin{aligned} P &= \frac{(4 \times 7 + 2)\,(6 \times 9 + 2)\,(8 \times 11 + 2) \cdots (98 \times 101 + 2)}{(5 \times 8 + 2)\,(7 \times 10 + 2)\,(9 \times 12 + 2) \cdots (99 \times 102 + 2)} \cdot (100 \times 103 + 2) = \\ &= \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{11} \cdots \frac{99}{101} \cdot 10302 = \\ &= \frac{5}{101} \cdot 10302 = 510 \end{aligned}$$

10. Supponiamo che ogni termine della successione

$$1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, \dots$$

è uguale a 1 oppure a 2. Se vi sono esattamente $2k-1$ termini uguali a 2 tra il k-esimo 1 ed il $(k+1)$-esimo 1, trovare la somma dei primi 2017 termini.

[R=3989]

Soluzione: Dividiamo i termini della successione in una serie di gruppi. Ogni gruppo inizia con 1 ed è seguito da tanti 2 fino al termine 1 successivo

$$\{1, 2\}, \quad \{1, 2, 2, 2\}, \quad \{1, 2, 2, 2, 2, 2\}, \quad \{1, \dots\}, \dots$$

E' evidente che il k-esimo gruppo contiene $2k$ termini la cui somma è uguale a $1 + 2(2k-1) = 4k-1$.

Il numero di termini in questi gruppi formano una successione aritmetica. Il numero complessivo di termini nei primi n gruppi è dato da

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot n = n(n+1)$$

Osserviamo che

$$n(n+1) \leq 2017 \quad \Rightarrow \quad n \leq 44$$

da cui segue che 2017 termini della successione originale coprono 44 gruppi completi ed 1 gruppo parziale. Dunque vi sono 45 termini uguali ad 1 tra i primi 2017 termini e $(2017-45)$ termini uguali a 2. Pertanto la somma dei primi 2017 termini è uguale a

$$45 \cdot 1 + (2017 - 45) \cdot 2 = 3989$$

11. La squadra di calcio del Liceo Einstein è formata da 11 giocatori di cui 1 portiere, 4 difensori, 3 centrocampisti e 3 attaccanti. Vogliamo fare una foto mettendo tutti i giocatori in piedi, su un'unica fila, uno a fianco all'altro. Però nessun attaccante vuole stare vicino ad un altro attaccante. I centrocampisti, invece, vogliono stare a tutti i costi vicini tra loro. Chiamiamo N il numero di modi in cui possiamo disporre la squadra in modo da accontentare sia gli attaccanti sia i centrocampisti. Dare come risposta ***il numero*** N ***diviso per 100***.
(Considera che tutti i giocatori, anche quelli con lo stesso ruolo, sono distinguibili fra loro.)

[R=9072]

Soluzione: Poiché i centrocampisti vogliono stare a tutti i costi vicini tra loro,possiamo sostituire i tre posti occupati da loro tre con una nuova lettera, ad esempio K.
Ovviamente esistono 3! modi diversi di sistemare vicini i tre centrocampisti, ma noi ne scegliamo uno (ad esempio questo $C_1C_2C_3$) e lo indichiamo con il simbolo K.
Ora consideriamo una delle tante possibili file composte da P (il portiere), D_1, D_2, D_3, D_4 (i 4 difensori) e K (il blocco unico dei tre centrocampisti).
Possiamo disporre in fila questi sei simboli in 6! modi diversi. Scegliamone uno, ad esempio:

$$P\ D_1\ D_2\ D_3\ D_4\ K$$

Infine dobbiamo sistemare i tre attaccanti, ma stando attenti a non farli capitare mai uno vicino all'altro. Per prima cosa osserviamo che essi potrebbero occupare 3 dei seguenti 7 posti: a sinistra di P, tra P e D_1, tra D_1 e D_2, tra D_2 e D_3, tra D_3 e D_4, tra D_4 e D_K e, infine, a destra di K. Abbiamo così

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!}$$

modi di farlo.
Anche qui, per ogni scelta di una terna di posti, si possono permutare i posti dei tre attaccanti in 3! modi.
Dunque il numero di modi in cui possiamo disporre la squadra in modo da accontentare sia gli attaccanti sia i centrocampisti è:

$$N = 3! \cdot \binom{7}{3} \cdot 6! \cdot 3! = 907200$$

.
Dunque la risposta è

$$\frac{N}{100} = 9072.$$

12. Quando frequentavo il Liceo Einstein la mia classe era formata da 27 alunni: 15 ragazze e 12 ragazzi. Il mio professore di matematica ci chiese di contare il numero N di tutti i diversi gruppi di studio che avremmo potuto formare scegliendo 3 ragazze e 2 ragazzi. Sapresti calcolare il valore del ***numero*** N ***diviso per 10***?

[R=3003]

Soluzione: Basta contare quante sono le possibili terne da formare con le 15 ragazze e quante sono le possibili coppie da formare con i 12 ragazzi. Il numero N di tutti possibili gruppi di studio, formati da tre ragazze e due ragazzi, si ottiene quindi moltiplicando

$$N = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2} = 30030$$

Dunque la risposta è

$$\frac{N}{10} = 3003.$$

.

13. Dire quanti sono i numeri di 8 cifre tali che:

(a) non presentano lo zero nè le cifre superiori al 5;
(b) iniziano con una cifra pari (2 oppure 4);
(c) due cifre uguali non sono mai una a fianco all'altra;
(d) mai cifre dispari sono vicine fra loro.

[R=5300]

Soluzione: Cerchiamo una formula ricorsiva. Indichiamo con x_n il numero dei *"numeri buoni"* di lunghezza n, cioè di numeri formati da n cifre e che soddisfano tutte le richieste sopra elencate.
I *"numeri buoni"* possono iniziare con 2 o con 4, quindi, per simmetria, la metà di loro inizierà con 2 e l'altra metà inizierà con 4.
Supponiamo allora di iniziare a mettere come prima cifra il 2.
La seconda cifra può essere 4 oppure una delle cifre dispari. Non possiamo usare di nuovo il 2 perchè andremmo contro la regola che dice che *due cifre uguali non sono mai una a fianco all'altra.*
Quanti sono i *"numeri buoni"* che hanno come prima cifra il 2 e come seconda cifra il 4? Esattamente $\frac{x_{n-1}}{2}$ perchè sono tanti quanti i *"numeri buoni"* di lunghezza $n-1$ che iniziano con 4.
Quanti sono i *"numeri buoni"* che hanno come prima cifra il 2 e come seconda cifra un numero dispari? Esattamente $3 \cdot x_{n-2}$ perchè dopo aver messo 2 come prima cifra e uno dei 3 numeri dispari come seconda cifra, rimangono da sistemare $n-2$ cifre che iniziano con una cifra pari. La terza cifra infatti non può essere dispari perchè altrimenti andremmo contro la regola che dice che *mai cifre dispari sono vicine fra loro.*
Dunque

$$\frac{x_n}{2} = \frac{x_{n-1}}{2} + 3 \cdot x_{n-2}$$

e moltiplicando per 2 entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$$x_n = x_{n-1} + 6 \cdot x_{n-2}$$

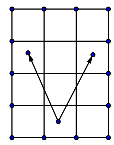
Osserviamo, inoltre, che i *"numeri buoni"* di lunghezza 1 sono 2 (perchè devono iniziare con 2 oppure con 4), mentre i *"numeri buoni"* di lunghezza 2 sono 8 (perchè se iniziano con 2 possono avere come seconda cifra tutte tranne 2, quindi 4 scelte, e altrettante scelte se iniziano con 4, per simmetria). Dunque

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 8.$$

Pertanto per arrivare alla soluzione è sufficiente compilare la seguente tabella:

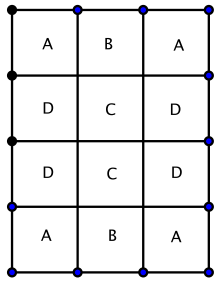
n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	2	8	20	68	188	596	1724	5300

14. Un cavallo si muove su una scacchiera 4 righe per 3 colonne, con la classica mossa ad elle degli scacchi, saltando da una casella ad un'altra come mostrato in figura. Partendo dalla casella centrale della prima riga in basso, quanti percorsi di 8 salti potrà fare?

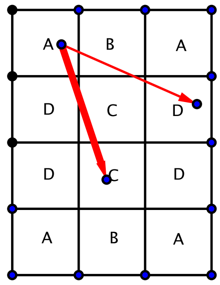


[R=1270]

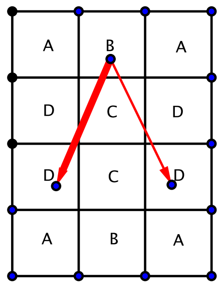
Soluzione:
Denominiamo le caselle della nostra scacchiera con opportune lettere, a seconda della loro posizione, così come illustrato nella tabella a fianco: A (caselle d'angolo), B (caselle medie delle basi), C (caselle centrali e interne) e D (caselle laterali dei lati verticali).



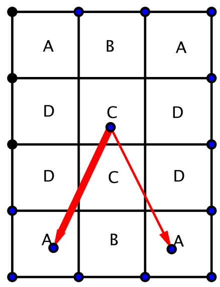
Se il cavallo parte da una qualunque casella A, ad esempio da quella posta in alto a sinistra,(prima riga e prima colonna) con una *mossa ad ELLE* potrà arrivare **o in una casella** D (nel nostro caso, partendo dalla casella A in alto a sinistra arriva nella casella D seconda riga e terza colonna) **oppure in una casella** C (nel nostro caso arriva nella casella della terza riga e seconda colonna).



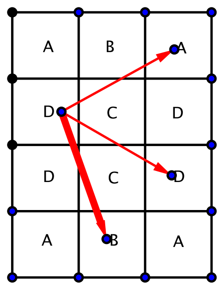
Se il cavallo parte da una qualunque casella B, ad esempio da quella posta al centro della prima riga a partire dall'alto, con una *mossa ad ELLE* potrà arrivare **in una delle due caselle** D della terza riga, a partire dall'alto.



Se il cavallo parte da una qualunque casella C, ad esempio da quella posta al centro della seconda riga, a partire dall'alto, con una *mossa ad ELLE* potrà arrivare **in una delle due caselle** A della quarta riga, a partire dall'alto.



Se il cavallo parte da una qualunque casella D, ad esempio da quella posta nella seconda riga e prima colonna, con una *mossa ad ELLE* potrà arrivare **o in una casella** A (nel nostro esempio prima riga e terza colonna); **oppure in una casella** B (nel nostro esempio quarta riga e seconda colonna);**oppure in un'altra casella** D (nel nostro esempio terza riga e terza colonna).



Cerchiamo una legge ricorsiva, indicando con:
a_n il numero di percorsi lunghi n mosse che partono da una casella A
b_n il numero di percorsi lunghi n mosse che partono da una casella B
c_n il numero di percorsi lunghi n mosse che partono da una casella C
d_n il numero di percorsi lunghi n mosse che partono da una casella D
Osserviamo subito che i valori iniziali di ogni sequenza sono:

$$a_1 = 2, \qquad b_1 = 2, \qquad c_1 = 2, \qquad d_1 = 3,$$

mentre le leggi ricorsive sono:

$$a_n = c_{n-1} + d_{n-1}; \qquad b_n = 2 \cdot d_{n-1};$$
$$c_n = 2 \cdot a_{n-1}; \qquad d_n = a_{n-1} + b_{n-1} + d_{n-1}.$$

Infatti se parto da una casella A dopo una mossa mi trovo in una casella C oppure in una casella D con altre $n-1$ mosse da fare. Ma sappiamo che il numero di percorsi lunghi $n-1$ mosse che partono da C è c_{n-1}, mentre il numero di percorsi lunghi $n-1$ mosse che partono da D è d_{n-1}.
Quindi $a_n = c_{n-1} + d_{n-1}$.
Analogamente si giustificano le altre formule di ricorrenza elencate sopra.
Ora per trovare la risposta al problema, ovvero b_8, è sufficiente compilare la seguente tabella:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	5	11	28	65	163		
b_n	2	6	14	36	86	214		1270
c_n	2	4	10	22	56			
d_n	3	7	18	43	107	258	635	

Dunque la risposta è 1270.

15. Riccardo ha 12 caramelle: 4 all'arancia, 4 alla fragola e 4 al limone. In quanti modi diversi può distribuirle alle sue tre sorelle, in modo che ciascuna ne abbia almeno una?

[R=3003]

Soluzione: Prima di tutto calcoliamo in quanti modi Riccardo può distribuire, senza alcun vincolo, le 4 caramelle all'arancia alle tre sorelle Giorgia, Giulia e Chiara.
Possiamo usare la tecnica dei separatori:
chiamiamo con A ogni caramella all'arancia e con I un separatore.
Ogni possibile distribuzione di caramelle corrisponde ad una parola con 4 A e 2 I.
Ad esempio la parola $A\ I\ A\ I\ A\ A$ corrisponde alla seguente distribuzione: 1 caramella a Giorgia, 1 caramella a Giulia e 2 caramelle a Chiara; mentre la parola $I\ A\ I\ A\ A\ A$ corrisponde alla seguente distribuzione: 0 caramelle a Giorgia, 1 caramella a Giulia e 3 caramelle a Chiara.
Ma allora per contare il numero di modi che ha Riccardo di distribuire le 4 caramelle all'arancia alle sue tre sorelle è sufficiente calcolare gli anagrammi della parola $A\ I\ A\ I\ A\ A$. Essi sono

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Analogamente Riccardo può distribuire le 4 caramelle alla fragola in 15 modi e anche le 4 caramelle al limone in 15 modi. Quindi Riccardo ha $15^3 = 3375$ modi di distribuire le caramelle alle sue sorelle.
Ma il vincolo del problema ci impone di assicurarci che ogni sorella abbia almeno una caramella.
Basterà contare quante sono le distribuzioni che lasciano almeno una sorella senza caramelle (casi non buoni) e sottrarre tale numero a 3375.
Supponiamo che Giorgia non riceva caramelle. In tal caso le 4 caramelle all'arancia vanno distribuite fra Giulia e Chiara. Ogni possibile distribuzione di caramelle corrisponde ad una parola con 4 A e 1 I.
Ad esempio la parola $A\ I\ A\ A\ A$ corrisponde alla seguente distribuzione: 1 caramella a Giulia e 3 caramelle a Chiara. Ma allora per contare il numero di modi che ha Riccardo di distribuire le 4 caramelle all'arancia alle sue tre sorelle (senza darne nemmeno una a Giorgia) è sufficiente calcolare gli anagrammi della parola $A\ I\ A\ A\ A$. Essi sono

$$\frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

Analogamente Riccardo può distribuire le 4 caramelle alla fragola in 5 modi e anche le 4 caramelle al limone in 5 modi. Quindi Riccardo ha $5^3 = 125$ modi di distribuire le caramelle alle sue sorelle lasciando Giorgia a mani vuote.
Ma esistono simmetricamente altri 125 modi di lasciare Giulia a mani vuote e altri 125 modi di lasciare Chiara senza caramelle. Quindi ci sono $3 \cdot 5^3 = 3 \cdot 125 = 375$ modi di distribuire le caramelle che non rispettano il vincolo del problema.
Ma in questi 375 modi abbiamo contato **due volte** i seguenti casi:
tutte le caramelle sono andate a Giorgia;
tutte le caramelle sono andate a Giulia;
tutte le caramelle sono andate a Chiara.
Infatti quando abbiamo supposto che Riccardo non dava caramelle a Giorgia, abbiamo trovato il caso **tutte le caramelle vanno a Giulia**. Tale caso si è presentato nuovamente quando abbiamo supposto che Riccardo non dava caramelle a Chiara.
Pertanto le distribuzioni che lasciano **almeno** una sorella senza caramelle (casi non buoni) sono in realtà $375 - 3 = 372$.
Dunque il numero di possibili distribuzioni che soddisfano il vincolo sono

$$3375 - 372 = 3003.$$

16. Il robot Euclide sa calcolare la somma delle lunghezze di tutti i cateti minori dei triangoli rettangoli non degeneri che hanno lati di misura intera che non eccede 100 e cateto maggiore la cui lunghezza differisce di un'unità da quella dell'ipotenusa. Forse lo sapreste fare anche se vi ricordaste a cosa è uguale la somma dei primi k numeri dispari positivi...

    Qual è il valore della somma?

[R=0048]

Soluzione: Supposto che il cateto maggiore misuri n allora l'ipotenusa misurerà $n+1$; essendo l'ipotenusa maggiore di ciascuno dei cateti avremo $n+1 \geq 3$. Per il Teorema di Pitagora la misura x del cateto minore soddisfa l'equazione $x^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Pertanto x è un numero dispari (avendo quadrato dispari) che non supera 100 tale che $3 \leq n+1 = \frac{x^2+1}{2} \leq 100$. Abbiamo allora solo le possibilità

$$x = \begin{cases} 3 & \text{quando } n+1 = 5 \\ 5 & \text{quando } n+1 = 13 \\ 7 & \text{quando } n+1 = 25 \\ 9 & \text{quando } n+1 = 41 \\ 11 & \text{quando } n+1 = 61 \\ 13 & \text{quando } n+1 = 85 \end{cases}$$

La somma di tali valori di x è pertanto 48.

La formula $(n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1)$ fornisce tali terne pitagoriche nel caso in cui $2n+1$ sia un quadrato...

17. Il PIN dello sblocco dello schermo del mio computer è uguale al quadrato del numero formato dalle due ultime cifre decimali del resto della divisione di $2^{1002757896592346154865429154205}$ per 101. L'ho dimenticato, ma so che tu lo puoi trovare facilmente. Me lo dici per favore?

[R=0014]

Soluzione: Poiché $p = 101$ è un numero primo che non divide 2, dal Piccolo Teorema di Fermat discende che $2^{100} = 2^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Pertanto

$$\begin{aligned} 2^{1002757896592346154865429154205} &= 2^{1002757896592346154865429154200} \cdot 2^5 \\ &= (2^{100})^{10027578965923461548654291542} \cdot 2^5 \\ &\equiv 1^{10027578965923461548654291542} \cdot 1024 \\ &= 1024 = 101 \cdot 10 + 14 \\ &\equiv 14 \mod 101. \end{aligned}$$

18. Determinare la somma degli interi positivi n minori di 30 tali che n sia un divisore di $(n-1)!+1$.

[R=0130]

Soluzione: Richiedere che n sia un divisore di $(n-1)!+1$ equivale a richiedere che $(n-1)! \equiv -1 \mod n$. Per il teorema di Wilson tale condizione è vera se e solo se n è primo o uguale a 1. Pertanto la risposta è $1+2+3+5+7+11+13+17+19+23+29 = 130$.

19. Dopo che è stato finalmente dimostrato che, come congetturato da Fermat, se $n \geq 3$ l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere con $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$, sono sicuro che potete determinare il numero degli interi n positivi e minori di 1000 tali che $n^3 = 3k^2 + 3k + 1$ per qualche intero positivo k.

[R=0000]

Soluzione: Supposto che $n^3 = 3k^2 + 3k + 1$ con $k \geq 1$, abbiamo $n^3 + k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$, contraddicendo il Teorema di Fermat. Pertanto il numero di tali interi è 0.

20. Trovare il numero dei punti a coordinate intere della curva di equazione

$$5y + xy - x^2 - x - 6 = 0.$$

[R=0008]

Soluzione: Esplicitando la variabile y otteniamo $y = \frac{x^2+x+6}{x+5} = \frac{(x+5)(x-4)+26}{x+5} = x - 4 + \frac{26}{x+5}$ Dal momento che x e y sono interi e questo accade se e solo se $\frac{26}{x+5} = y - (x-4)$ è un intero, dovremo avere

$$x + 5 = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \\ \pm 13 \\ \pm 26 \end{cases}$$

per un totale di 8 soluzioni.